УДК 519.41/47

С. Н. Черников

Исследования В. М. Глушкова по теории групп
(к 60-летию со дня рождения)

24 августа 1983 года исполнилось 60 лет со дня рождения Героя Социалистического Труда академика Виктора Михайловича Глушкова (умер 30 января 1982 г.). Выдающийся ученый в области кибернетики, выдающийся организатор науки — Виктор Михайлович широко известен также как крупный математик-алгебраист, как автор фундаментальных исследований по теории групп. Настоящая статья посвящена его исследованиям в этой области.

1. Интерес к теории групп у В. М. Глушкова возник уже после окончания университета (окончил Ростовский н/Д университет в 1948 г.), когда он начал работать в Свердловске (в Уральском лесотехническом институте). К тому времени при Уральском университете из учеников и последователей профессора С. Н. Черникова сложился творческий коллектив, активно работавший в области теории групп. Включившись в работу семинара по теории групп, В. М. Глушков увлекся его тематикой и проявил большую творческую инициативу в решении возникавших вопросов. В 1949 г. Глушков был зачислен в аспирантуру к автору при Уральском университете. Отлично сдав кандидатские экзамены, он в 1951 г. окончил аспирантуру, блестяще защитив кандидатскую диссертацию по теории групп. В результатах его диссертации широко представлена идея изучения групп по заданным свойствам системы подгрупп — основная идея, определявшая тематику семинара. Ею в значительной степени определялась как тематика теоретико-групповых исследований участников семинара, так и выбор в качестве основных объектов исследований локально нильпотентных и локально разрешимых групп. Эти группы являются также и основными объектами исследований В. М. Глушкова в теории групп. Напомним их определения.

Группа G называется локально нильпотентной (соответственно локально разрешимой), если все ее конечно порожденные (с конечным множеством образующих элементов) подгруппы нильпотенты (разрешимы).

Из определения следует, что класс локально нильпотентных групп содержится в классе локально разрешимых групп. Оказалось, что класс локально нильпотентных групп содержит весьма широкий класс ZA-групп, т. е. класс групп, обладающих возрастающим центральным рядом [1]. Изучение бесконечных локально нильпотентных и локально разрешимых групп начато еще в 1940 г. (см. [2]). Была получена следующая теорема.

Если бесконечная локально разрешимая группа удовлетворяет условию минимальности для подгрупп (при этом условии она, очевидно, периодическая), то она является расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп с помощью конечной группы

По определению группа удовлетворяет условию минимальности для подгрупп (или просто условию минимальности), если из ее подгрупп нельзя составить ни одной бесконечной убывающей цепочки подгрупп. Аналогично определяются более слабые условия минимальности для абелевых подгрупп, для нормальных подгрупп.

В связи с приведенной теоремой возникли попытки изучать локально разрешимые группы, удовлетворяющие так или иначе ослабленному условию минимальности. В 1949 г. было установлено, что утверждение теоремы сохраняется при условии минимальности для абелевых подгрупп (см. [2]) и не сохраняется при условии минимальности для нормальных подгрупп [3]. Несколько ранее было установлено (см. [2]), что при этом условии оно сохраняется для локально конечных p-групп (они, очевидно, локально разрешимы).

Отмеченные результаты привлекли внимание В. М. Глушкова к локально разрешимым и особенно локально нильпотентным группам. Большое впечатление на В. М. Глушкова произвели работы [4, 5], посвященные полным ZA-группам (как уже отмечалось, ZA — группы локально нильпотентны). Полной в этих работах называется произвольная группа, каждый элемент которой при произвольном натуральном числе n можно представить в виде произведения n-х степеней некоторых ее элементов. В работе [4] показано, что полные ZA-группы — это в точности ZA-группы, не имеющие собственных подгрупп конечного индекса; в ней же показано, что полные ZA-группы являются группами с неограниченной извлекаемостью корня из их элементов. В работе [5] дано конструктивное описание полных ZA-групп.

Реферируя на семинаре работы [4, 5], В. М. Глушков указывал свои оригинальные подходы к получению этих результатов и, в частности, к получению конструктивного описания полных ZA-групп из работы [5]. При этом возник вопрос, будет ли полной группой нормализатор полной подгруппы в полной ZA-группе? Положительный ответ на него получен в первой работе В. М. Глушкова [6]. Во время учебы в аспирантуре В. М. Глушков опубликовал работы [6—10].

Продолжая заниматься полными группами, В. М. Глушков получил следующий интересный результат: в локально нильпотентной группе без кручения подгруппа, порожденная любым множеством подгрупп с неограниченной извлекаемостью корня из этих элементов, обладает также этим свойством [9].

Интерес В. М. Глушкова к локально нильпотентным группам без кручения возник в связи с работами [1] и [11]. В работе [1] его внимание привлекла следующая теорема общего характера: всякую локально нильпотентную группу G без кручения можно вложить в полную локально нильпотентную группу G^* без кручения, являющуюся группой с неограниченной извлекаемостью корня из ее элементов, так, что любой элемент из G^*, будучи возведен в подходящую степень, содержится в G. Группа G^* определяется при этом однозначно с точностью до изоморфизма (и называется пополнением группы G).

В работе [11], посвященной ZA-группам без кручения, внимание В. М. Глушкова привлекли впервые появившееся в ней условие минимальности для изолированных подгрупп (т. е. для подгрупп, содержащих все корни из своих элементов) и связанное с ним понятие рационального ряда. В ней установлено, в частности, что ZA — группа без кручения, удовлетворяющая условию минимальности для изолированных подгрупп, обладает рациональным рядом конечной длины, т. е. нормальным рядом конечной длины с факторами, изоморфными тем или иным подгруппам аддитивной группы рациональных чисел. Так как ZA — группы локально нильпотентны, то естественно возникла попытка распространить этот результат на локально нильпотентные группы без кручения, что и было сделано В. М. Глушковым в работе [9].

В работе [9] изучались локально нильпотентные группы без кручения как с условием обрыва убывающих цепей изолированных подгрупп (условие минимальности для изолированных подгрупп), так и с условием обрыва возрастающих цепей изолированных подгрупп (условие максимальности для изолированных подгрупп). Оказалось, что условия минимальности и максимальности для изолированных подгрупп, а также условие максимальности для изолированных нормальных подгрупп, обеспечивают нильпотентность локально нильпотентной группы без кручения и конечность ее специального ранга (специального в смысле А. И. Мальцева).

По определению группа имеет конечный специальный ранг r, если r — такое наименьшее натуральное число, что каждая ее конечно порожденная подгруппа может быть порождена не более чем r элементами.

В работе [9] также установлено, что локально нильпотентная группа без кручения тогда и только тогда имеет конечный специальный ранг r, когда она обладает рациональным рядом длины r.

Упоминавшаяся выше теорема А. И. Мальцева о пополнениях была дополнена В. М. Глушковым [9] следующим утверждением.

Специальный ранг локально нильпотентной группы без кручения совпадает со специальным рангом ее пополнения.

Отметим, наконец, еще одну интересную теорему, полученную в [9].

Всякая локально нильпотентная группа без кручения с условием минимальности для изолированных нормальных подгрупп разрешима и обладает верхним центральным рядом, факторы которого имеют конечные специальные ранги.

В [9] изложены основные результаты кандидатской диссертации В. М. Глушкова, защищенной им в 1951 году в Уральском государственном университете.

2. Еще во время учебы в аспирантуре В. М. Глушков заинтересовался топологическими группами. Это было связано с изучением им монографии [12], значительная часть содержания которой входила в программу кандидатского экзамена по алгебре. Уже тогда у В. М. Глушкова возникла мысль о целесообразности изучения топологических групп, удовлетворяющим тем или иным абстрактно-групповым условиям (нильпотентность, локальная нильпотентность, разрешимость, локальная разрешимость). В связи с отмеченной выше теоремой о локально разрешимых группа с условием минимальности для подгрупп его интересовал, в частности, вопрос о строении топологических групп, удовлетворяющих условию минимальности для замкнутых подгрупп. Интересовал его также вопрос о распространении понятия полноты на топологические группы, и он предложил с этой целью весьма естественное расширение этого понятия.

Основным объектом исследований В. М. Глушкова топологические группы стали уже после окончания им аспирантуры. На основе результатов и идей своих работ, относящихся к абстрактным локально нильпотентным группам, он нашел и реализовал свой подход к изучению топологических групп, выделив и обстоятельно изучив класс локально нильпотентных локально бикомпактных групп. В 1954—1956 гг. в работах [13]—[15] В. М. Глушков построил теорию выделенных им топологических групп (их теорию в целом), одним из главных результатов которой явилась теорема, описывающая строение этих групп.

Выделение локально бикомпактных топологических групп в качестве объекта изучения связано с тем, что решение пятой проблемы Гильберта — проблемы введения аналитических координат в произвольной локально евклидовой группе (решена в 1952 г.) — выдвинуло на первый план задачу изучения некоммутативных локально бикомпактных групп в целом.

Исследуя произвольные локально бикомпактные группы, В. М. Глушков в [16] установил, что любая связная локально бикомпактная группа изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе топологического прямого произведения некоторого множества связных некоммутативных простых компактных групп Ли, некоторого множества соленоидов, некоторой связной односвязной группы Ли, и, наконец, аддитивных групп целых p-адических чисел, взятых в конечном числе экземпляров для каждого простого числа p.

В работе [17] установлено, что локально бикомпактные группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп (без каких бы то ни было дополнительных условий) исчерпываются расширениями связных компактных групп Ли посредством дискретных групп, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп. В работе [17] установлено также, что локально разрешимые бикомпактные группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп являются конечными расширениями конечных прямых произведений одномерных торовидных групп и дискретных квазициклических групп. Это предложение обобщает сформулированную выше теорему С. Н. Черникова о строении дискретных локально разрешимых групп с условием минимальности.

В работе [18] В. М. Глушков ввел следующее определение: топологическая группа G называется полной над топологическим полем Σ, если любой элемент из G содержится хотя бы в одной подгруппе, являющейся непрерывным гомоморфным образом аддитивной группы поля Σ. Полнота над дискретно топологизированным полем рациональных чисел, очевидно, эквивалентна свойству неограниченной извлекаемости корня из любого элемента группы. В работе получен следующий интересный результат: всякая локально нильпотентная локально бикомпактная группа без кручения, полная над полем действительных чисел, является связной односвязной нильпотентной группой Ли (нильпотентной конечномерной группой Ли над полем действительных чисел).

В 1956 г. В. М. Глушков защитил докторскую диссертацию в Московском государственном университете. Богатые идеями и результатами исследования Глушкова по теории групп — неоценимый вклад в советскую алгебру. Основная идея его работ — наложение тех или иных требований абстрактно-группового характера на топологические группы с целью выделения и изучения новых классов топологических групп — привлекла в открытую им область исследований многих алгебраистов (В. С. Чарин, В. П. Платонов, и др.) и получила у них дальнейшее развитие.

1. *Мальцев А. И.* Нильпотентные группы без кручения.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, № 2, с. 201—212.
2. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
3. *Чарин В. С.* Замечание об условии минимальности для подгрупп.— ДАН СССР, 1949, 66, № 4, с. 575—576.
4. *Черников С. Н.* Полные группы, обладающие возрастающим центральным рядом.— Мат. сб., 1946, 18, вып. 3, с. 397—422.
5. *Черников С. Н.* К теории полных групп.— Мат. сб., 1948, 22, вып. 3, с. 319—348.
6. *Глушков В. М.* О нормализаторах полных подгрупп в полной группе.— ДАН СССР, 1950, 71, № 3, с. 421—424.
7. *Глушков В. М.* К теории ZA-групп.— ДАН СССР, 1950, 74, № 5, с. 885—888.
8. *Глушков В. М.* О локально нильпотентных группах без кручения.— ДАН СССР, 1951, 80, № 2, с. 157—160.
9. *Глушков В. М.* О некоторых вопросах теории нильпотентных и локально нильпотентных групп без кручения.— Мат. сб., 1952, 30, вып. 1, с. 79—104.
10. *Глушков В. М.* О центральных рядах бесконечных групп.— Мат. сб., 1952, 31, вып. 3, с. 491—496.
11. *Черников С. Н.* К теории групп без кручения, обладающих возрастающим центральным рядом.— Уч. зап. Уральского ун-та, 1949, вып. 7, с. 3—21.
12. *Понтрягин Л.С* . Непрерывные группы.— М.—Л.: ГОНТИ, 1938.— 316 с.
13. *Глушков В. М.* Об одном классе некоммутативных локально бикомпактных групп.— ДАН СССР, 1954, 96, № 2, с. 229—232.
14. *Глушков В. М.* Локально нильпотентные локально бикомпактные группы.— Труды Моск. мат. об-ва, 1955, 4, с. 291—332.
15. *Глушков В. М.* К теории нильпотентных локально бикомпактных групп.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1956, 20, № 4, с. 513—546.
16. *Глушков В. М.* О строении связных локально бикомпактных групп.— Мат. сб., 1959, 48, вып. 1, с. 75—92.
17. *Глушков В. М.* Локально бикомпактные группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп.— Укр. мат. журн., 1956, 8, № 1, с. 135—139.
18. *Глушков В. М.* Локально нильпотентные группы без кручения, полные над простыми топологическими полями.— Мат. сб. 1955, 37, вып. 3, с. 477—506.