ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 2 Май 1962 Июнь № 3

САМООРГАНИЗУЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ И АБСТРАКТНАЯ ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ

В. М. ГЛУШКОВ

(Киев)

Теорию дискретных самоорганизующихся систем, по-видимому, наиболее рационально строить на базе структурной теории автоматов (см. [1] или [2]). При этом самоорганизующаяся система представляется в виде логической сети, имеющей переменную структуру, а иногда и меняющееся с течением времени число элементов. Оставаясь на уровне абстрактной теории автоматов (см. [2]), мы, естественно, проигрываем в богатстве возможных определений. Целью настоящей статьи является попытка показать, что, несмотря на указанные ограничения, и в рамках абстрактной теории автоматов можно строить достаточно содержательную теорию самоорганизующихся систем.

Абстрактным автоматом мы называем объект с конечным или счетным числом состояний $a_1, a_2, \ldots, a_n$, способный в каждый из моментов дискретного времени $t = 1, 2, \ldots, k, \ldots$ принимать входной сигнал $x(t)$ из некоторого конечного или счетного множества входных сигналов, переходить из предыдущего состояния $a(t-1)$ в следующее состояние $a(t)$ и выдавать выходной сигнал $y(t)$ из некоторого конечного или счетного множества выходных сигналов. Соответствующие действия автомата задаются при помощи двух функций — функции переходов $a(t) = \delta[a(t-1), x(t)]$ и функции выходов $y(t) = \lambda[a(t-1), x(t)]$.

Фиксируя некоторое состояние a_0 в качестве начального состояния $a(t)$ автомата, мы превращаем его в преобразователь информации, преобразующий произвольные последовательности $x(1)\, x(2) \ldots x(n)$ входных сигналов в соответствующие им последовательности $y(1)\, y(2) \ldots \ldots y(n) \ldots$ выходных сигналов. При такой интерпретации действия автомата мы можем рассматривать его как преобразователь с неизменной структурой, лишенный каких-либо элементов самоорганизации.

Возможна, однако, и другая точка зрения, более соответствующая нашему обычному представлению о функционировании автоматов. Предположим, что тем или иным способом входная последовательность $x(1)\, x(2) \cdots x(n) \cdots$ разбита на отрезки $x(1)\, x(2) \cdots x(n_1)$, $x(n_1+1) \cdots x(n_2), \cdots$, $x(n_{k-1}+1)\, x(n_{k-1}+2) \cdots x(n_k), \cdots$, которые мы будем называть входными словами или *вопросами* и обозначать для краткости через $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, \ldots$. Соответствующие отрезки выходной последовательности

$$q_1 = y(1)\,y(2)\ldots y(n_1), \ldots, \qquad q_{k-1} = y(n_{k-1}+1)\,y(n_{k-1}+2)\ldots y(n_k)$$

(выходные слова) естественно называть *ответами* на соответствующие им вопросы.

Ясно, что ответ автомата на тот или иной вопрос зависит теперь, вообще говоря, не только от самого вопроса, но и от того *места*, которое данный вопрос занимает в рассматриваемой упорядоченной последовательности вопросов и ответов. Более точно, ответ на произвольный вопрос p_i нашей последовательности зависит как от самого вопроса p_i, так и от последовательности предшествующих вопросов $p_1, \ldots, p_{i-1}$, составляющих (вместе с соответствующими им ответами $q_1, \ldots, q_{i-1}, \ldots$) некоторую *историю обучения* рассматриваемого автомата.

Термины «вопрос» и «ответ» не должны пониматься при этом слишком буквально. В частности, в каждый последующий вопрос может входить, помимо собственно вопроса, также оценка предыдущего ответа автомата. Не следует думать также, что каждый ответ должен содержать то же самое число букв, что и соответствующий ему вопрос, поскольку при помощи введения как во входной, так и в выходной алфавиты автомата специальных *пустых* букв можно добиться любого соотношения между числом букв в любом данном вопросе и ответе. При этом собственно вопросом будет считаться вопрос с выброшенными из него пустыми буквами. Аналогичное положение будет иметь место и в случае ответов.

Операцию разбиения входной и выходной информации на пары «вопрос — ответ» будем называть *операцией циклирования*. На практике обычно приходится иметь дело с двумя основными способами выполнения этой операции. Первый способ, называемый *k-циклированием*, заключается в том, что информация разбивается на отрезки длины k, так что все вопросы и ответы состоят из k букв (включая и пустые буквы). Второй способ — это выделение конца одного вопроса и начала другого вопроса по некоторой фиксированной комбинации букв, называемой *меткой* (не исключено, что метка будет состоять из какой-либо одной, выделенной специально для этой цели, буквы).

При первом способе вопросы имеют одну и ту же длину, а общее число различных возможных вопросов в случае конечности входного алфавита будет непременно конечным. При втором способе циклирования вопросы могут иметь различную длину, а общее число вопросов может оказаться бесконечным, несмотря на конечность входного алфавита.

После того как тем или иным способом выполнено циклирование входной и выходной информации, можно осуществить так называемое *циклическое приведение* рассматриваемого автомата. С этой целью вводится новый входной алфавит, состоящий из всех вопросов в старом входном алфавите, рассматриваемых теперь как отдельные буквы. Аналогично, буквами нового выходного алфавита явятся всевозможные ответы на указанные вопросы в старом выходном алфавите. Оставляя неизменным множество состояний рассматриваемого автомата A, можно построить теперь новые функции переходов и выходов $\delta(a, p)$ и $\lambda(a, p)$, понимая под $\delta(a, p)$ состояние, в которое переходит автомат A из состояния a под действием входного слова (вопроса) p. Через $\lambda(a, p)$ обозначается ответ автомата A на вопрос p, если в качестве начального состояния выбирается состояние a. Ограничиваясь теперь лишь теми состояниями, в которые автомат A может переходить под действием всевозможных последовательностей вопросов, мы построим новый автомат B с определенными выше функциями переходов и выходов δ и λ. Этот автомат мы условимся называть *циклическим приведением* исходного автомата A.

После циклического приведения вопросы и ответы в автомате приобретают однобуквенную кодировку. Учитывая это обстоятельство, мы будем называть 1-циклированные автоматы (автоматы с однобуквенными вопросами и ответами) циклически *приведенными автоматами*, если они не имеют состояний, не достижимых из начального состояния.

Фиксировав способ циклирования входной и выходной информации, мы получаем возможность определять наличие *самоизменения* в автоматах. Действительно, автомат, способный давать различные ответы на один и тот же вопрос (в зависимости от предшествовавших ему вопросов), естественно называть *самоизменяющимся*. Легко видеть, что имеет место следующее предложение:

Автомат тогда и только тогда является не самоизменяющимся, когда функция выходов $\lambda(a, p)$ его циклического приведения не зависит от состояния a.

Ясно, что в зависимости от характера циклирования входной и выходной информации один и тот же автомат может оказаться как самоизменяющимся, так и несамоизменяющимся. Рассмотрим, например, автомат A с двумя состояниями 1 и 2, функции переходов и выходов которого задаются таблицами

	1	2
x	2	1
y	2	1

	1	2
x	u	v
y	v	u

При 1-циклировании этот автомат должен, очевидно, рассматриваться как самоизменяющийся. В случае же 2-циклирования после циклического приведения автомата A он преобразуется, как нетрудно видеть, в автомат с одним единственным состоянием и должен рассматриваться поэтому как несамоизменяющийся автомат.

Возникает вопрос: можно ли отождествить определенное выше самоизменение с самоорганизацией? Опираясь на интуитивное представление о самоорганизации, мы должны называть самоорганизующимся такой автомат, который улучшает организацию своих ответов при улучшении организации возможных историй его обучения. Для количественной характеристики указанных улучшений естественно воспользоваться таким теоретико-вероятностным понятием, как *энтропия*. Целесообразно при этом рассматривать две энтропийные характеристики, а именно *энтропию обучения* и *энтропию ответов* автомата.

Пусть $(p_1, p_2, \ldots, p_n) = P$ — последовательность вопросов (входных слов), заданных автомату в период его обучения. Эту последовательность мы будем называть *обучающей последовательностью.* Предположим, что в той или иной фиксированной серии экспериментов с автоматом для каждой обучающей последовательности P задана вероятность $\rho(P)$ появления этой последовательности в экспериментах рассматриваемой серии (предполагается, что в пределах данной серии эта вероятность не меняется от эксперимента к эксперименту).

Тем самым задается некоторое *распределение* Q вероятностей $\rho(P)$ обучающих последовательностей. Энтропия этого распределения, которую мы будем называть *энтропией обучения* с данным законом распределения обучения, вычисляется по обычной формуле

$$H^Q(\text{обуч.}) = -\sum_P \rho(P) \log \rho(P). \tag{1}$$

Для определенности условимся при подсчете энтропий пользоваться натуральными логарифмами.

В случае, когда фиксирован автомат A и его начальное состояние a_0, всякое распределение вероятностей $\rho(P)$ обучающих последовательностей однозначно определяет некоторое распределение вероятностей $\alpha(a)$ на множестве всех состояний этого автомата. Здесь через $\alpha(a)$ обозначена вероятность того, что после окончания процесса обучения автомата он окажется в состоянии a. Если через S_a обозначить событие на входе автомата, представляемое состоянием a (множество входных слов, переводящих автомат из начального состояния в состояние a), то имеет место очевидная формула

$$\alpha(a) = \sum_{P \in S_a} \rho(P), \tag{2}$$

где суммирование распространено на все слова $p_1 p_2 \ldots p_n$, содержащиеся в S_a (для краткости записи последовательность слов $P = (p_1, \ldots, p_n)$ отождествлена здесь со словом $p_1 p_2 \ldots p_n$, составленным из элементов этой последовательности).

Зададимся теперь некоторым распределением вероятностей $\gamma(p)$ вопросов p, задаваемых автомату п о с л е окончания процесса его обучения. Распределения $\alpha(a)$ и $\gamma(p)$ вместе с функциями переходов и выходов рассматриваемого автомата A однозначно определяют распределение вероятностей $\beta(p, q)$ для пар «вопрос (p) — ответ (q)». Энтропию этого последнего распределения мы будем называть *энтропией экзамена* с законом распределения обучения Q и обозначать через H^Q (экз.). Она определяется по формуле

$$H^Q(\text{экз.}) = -\sum \beta(p, q) \log \beta(p, q). \tag{3}$$

Используя в случае необходимости операцию циклического приведения автоматов, можно, не нарушая общности, рассматривать впоследствии лишь однобуквенные вопросы и ответы. При этом обучающие последовательности P превратятся в слова, составленные из отдельных составляющих их букв-вопросов, расположенных в том порядке, в котором они задавались автомату в процессе обучения.

Для дальнейшего построения теории необходимо задаться некоторым *классом* законов распределения обучения и присвоить каждому входящему в этот класс закону Q некоторую вероятность или, в случае непрерывных законов распределения, некоторую плотность вероятности $\rho(Q)$.

Простейший случай представляет *схема независимых испытаний*, когда на каждом шаге как в режиме обучения, так и в режиме экзамена вероятность $\gamma(P)$ появления любого данного вопроса постоянна и зависит только от этого вопроса. Ввиду ограничения лишь 1-циклированными автоматами задание закона распределения Q для обучения эквивалентно в этом случае присвоению некоторых вероятностей $\nu_i = \nu(x_i)$ появления на входе автомата каждой из букв x_i его входного алфавита. Сумма всех ν_i, разумеется, должна равняться при этом единице.

В случае схемы независимых испытаний естественно отождествлять закон распределения для обучения с вектором $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots)$, составленным из вероятностей появления различных входных букв (входной алфавит предполагается при этом каким-либо образом упорядоченным). Класс законов наиболее естественно отождествлять с множеством всех векторов $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots)$, удовлетворяющих естественным ограничениям $0 \leqslant \nu_i \leqslant 1$ и $\Sigma\nu_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$, с заданным на этом множестве *равномерным* законом распределения. Схему независимых испытаний с указанным выбором класса законов распределения условимся называть *равномерной схемой независимых испытаний*. При этом мы будем ограничиваться случаем, когда длина обучающей последовательности фиксирована, либо, в случае необходимости, предполагать, что эти длины описываются некоторым законом распределения (чаще всего пуассоновским).

Заметим, что в равномерной схеме независимых испытаний K выбор того или иного конкретного закона распределения определяет не только вероятности тех или иных обучающих последовательностей, но и вероятности $\gamma(p)$ появления тех или иных вопросов на экзамене.

Целесообразно обобщить это свойство на произвольные классы K законов распределения, считая, что каждый элемент Q этого класса определяет собой пару законов распределения — как для обучающих последовательностей, так и для вопросов на экзамене. Мы будем предполагать также, что класс K выбирается таким образом, чтобы он содержал один и только один закон распределения Q_0 с максимальной энтропией обучения H^{Q_0} (обуч.).

При этих предположениях нетрудно получить естественные количественные характеристики для способностей того или иного автомата к самоорганизации. Вводя приращения энтропий обучения и экзамена по формулам

$$\Delta H^Q(\text{обуч.}) = H^Q(\text{обуч.}) - H^{Q_0}(\text{обуч.}), \quad \Delta H^Q(\text{экз.}) = H^Q(\text{экз.}) - H^{Q_0}(\text{экз.}), \tag{4}$$

мы получаем возможность для любого автомата A и класса K законов распределения найти следующие две характеристики:

$$s(A, K) = -\int_K \Delta H^Q(\text{экз.})\, d\varphi(Q), \tag{5}$$

$$z(A,K)=\int\limits_{K}\frac{\Delta H^{Q}\,(\text{экз.})}{\Delta H^{Q}\,(\text{обуч.})}\,d\varphi(Q). \qquad (6)$$

Интегралы в этих формулах берутся по области, состоящей из всех законов рассматриваемого класса K. Чем больше величина этих интегралов, тем больше у рассматриваемого автомата A средняя способность к самоорганизации. Нулевому значению соответствует отсутствие способностей к самоорганизации, а отрицательные значения означают, что при улучшении организации обучения организация ответов автомата в среднем ухудшается. Иначе говоря, автомат ведет себя не как самоорганизующаяся, а как «самодезорганизующаяся» система.

Поскольку формула (6) приводит к значительно более сложным вычислениям, чем формула (5), в качестве основного количественного критерия для оценки способности автомата к самоорганизации мы будем выбирать критерий $s(A,K)$, а не критерий $z(A,K)$.

Рассмотрим в качестве примера два автомата A и B, функции переходов и выходов которых задаются следующими таблицами:

для автомата A

	1	2
x	1	1
y	2	2

	1	2
x	u	v
y	u	v

для автомата B

	1	2
x	1	2
y	2	2

	1	2
x	u	v
y	u	v

В этих таблицах цифрами 1 и 2 обозначены состояния автоматов, буквами x, y — входные сигналы (вопросы), а буквами u, v — выходные сигналы (ответы).

В качестве класса K законов распределения выберем такой класс, в котором вероятности появления вопросов x и y на экзамене равны между собой, а законы распределения обучающих последовательностей возникают из схемы независимых испытаний при вероятностях появления вопросов x и y, равных p и $1-p$ соответственно (p пробегает в пределах класса K все значения от 0 до 1 с равными вероятностями). Кроме того, мы фиксируем длину n обучающих последовательностей, а соответствующий выбранному значению n критерий $s(A,K)$ будем обозначать через $s_n(A,K)$.

С учетом сделанных замечаний нетрудно вычислить значения критерия s_n для автоматов A и B:

$$s_n(A,K)=\int\limits_0^1[p^2\ln p^2+2p(1-p)\ln p(1-p)+(1-p)^2\ln(1-p)^2-\ln\tfrac{1}{4}]\,dp=$$

$$=2\ln 2+2\int\limits_0^1[p\ln p+(1-p)\ln(1-p)]\,dp=2\ln 2-1\approx 0.38;$$

$$s_n(B,K)=\int\limits_0^1\left[p^n\ln\tfrac{1}{2}p^n+(1-p^n)\ln\tfrac{1}{2}(1-p^n)-\frac{1}{2^n}\ln\frac{1}{2^{n+1}}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\times\right.$$

$$\times \ln\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\Big]\,dp = \frac{n\ln 2+1}{2^n} - \frac{n}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)} + \cdots \right] - \left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2^{2n}} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^{3n}} + \cdots\right).$$

Используя последнее соотношение, получаем следующую оценку:

$$s_n(B, K) < \frac{n\ln 2+1}{2^n} - \frac{n}{(n+1)^2} - \frac{1}{4n}.$$

Из этой оценки легко получим, что при $n \geqslant 5$ величина $s_n(B, K)$ отрицательна. Иными словами, при обучении последовательностями длины, большей 4, в выбранном классе законов распределения автомат B является в среднем «самодезорганизующимся», в то время как автомат A в тех же условиях обнаруживает способность к самоорганизации.

Заметим, что вывод о наличии или отсутствии у автомата способности к самоорганизации зависит от выбора класса законов распределения. Если, например, в разобранном примере в качестве K выбрать класс законов распределения, возникающий из равномерной схемы независимых испытаний, то, как нетрудно проверить, автомат B также стал бы в среднем самоорганизующимся, хотя величина этой самоорганизации оставалась бы меньшей, чем у автомата A.

При переходе от понятия самоорганизации к понятию самообучения уже нельзя удовольствоваться чисто теоретико-вероятностными понятиями. Необходимо вводить понятия, которые характеризовали бы ту или иную направленность процесса самоорганизации. С этой целью наиболее естественно ввести вещественную функцию $f(p, q)$, определенную на множестве всевозможных пар «вопрос (p) — ответ (q)», величина которой характеризует качество любого ответа q на любой данный вопрос p.

Как уже отмечалось выше, для любого данного автомата A с фиксированным начальным состоянием a_0 задание закона Q распределения вероятностей $\rho(P)$ на обучающих последовательностях P однозначно определяет распределение вероятностей $\alpha(a)$ на множестве состояний автомата. Обозначим еще через $q = \lambda(a, p)$ ответ автомата A, приведенного предварительно в состояние a, на вопрос p, а через $\gamma(p)$ — вероятность появления вопроса p. Величина

$$f^Q = \sum_{p,\,a} f[p, \lambda(a, p)]\,\gamma(p)\,\alpha(a)$$

представляет собой усредненный критерий качества ответов автомата на «экзамене» при обучении его последовательностями, распределенными по закону Q.

Количеством самообучения автомата A естественно назвать теперь разность $f^Q - f^{Q_0}$, где Q_0 — априорный закон распределения вероятностей обучающих последовательностей, известный конструктуру в момент создания автомата, а Q — апостериорный закон распределения, который фактически имел место для некоторого класса экспериментов по обучению. Как правило, энтропия распределения Q меньше, чем энтропия распределения Q_0.

Если теперь задан класс K апостериорных законов распределения Q с плотностью вероятности $\varphi(Q)$, то интеграл

$$s_f(A, K) = \int\limits_{Q \in K} (f^Q - f^{Q_0}) \varphi(Q) \, dQ$$

представит собой усредненную количественную характеристику для способности рассматриваемого автомата к самообучению (применительно к выбранному классу K, автомату A и вещественной функции f).

Подобно тому как это имело место в случае самоорганизации, наряду с критерием $s_f(A, K)$ полезно рассматривать иногда также критерий

$$z_f(A, K) = -\int\limits_{Q \in K} \frac{f^Q - f^{Q_0}}{H(Q) - H(Q_0)} \varphi(Q) \, dQ,$$

где через $H(Q)$ и $H(Q_0)$ обозначены энтропии законов распределения Q и Q_0.

Поступила в редакцию
24. 01. 1962

Цитированная литература

1. В. М. Глушков. Некоторые проблемы синтеза цифровых автоматов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 3, 371—411.
2. В. М. Глушков. Абстрактная теория автоматов. Успехи матем. наук, 1961, 16, вып. 5, 3—62.