ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 2 Март 1962 Апрель № 2

ТЕОРИЯ ОБУЧЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ ПЕРСЕПТРОНОВ

В. М. ГЛУШКОВ

(*Киев*)

В работе [1] Розенблатт ввел одну интересную модель обучающегося автомата, названную им персептроном. Персептрон, по мысли Розенблатта, должен был давать наглядное представление о механизме обучения распознаванию зрительных образов, являющемся одним из характерных примеров приспособительных свойств мозга. Теория обучения и самообучения в персептронах, развитая в работе [1], несмотря на привлечение математического аппарата, носит чисто качественный характер и не может служить основой ни для конкретных количественных оценок, ни для строгого доказательства особенностей асимптотического поведения персептронов.

В работе [2] Розенблатт несколько изменил определение персептрона и провел экспериментальное исследование его свойств. Аналогичные работы были выполнены также рядом других авторов (см., например, [3]). Введенное Розенблаттом изменение состояло в замене непрерывных моделей нейронов, применявшихся в работе [1], дискретными моделями нейронов.

Достаточно строгая теория обучения дискретных персептронов (т. е. персептронов, использующих дискретные модели нейронов) была развита Джозефом [4]. Однако эта теория не обладает нужной для реальных количественных расчетов степенью наглядности и, самое главное, применяет статистический подход лишь к анализу первоначальной конструкции персептрона, а не к динамике самого процесса обучения. Благодаря этому теория Джозефа становится фактически неприменимой в том случае, когда речь идет не о конкретных обучающих последовательностях, а о множестве таких последовательностей, обладающем теми или иными статистическими свойствами.

Предлагаемый в настоящей работе вариант теории обучения дискретных персептронов устраняет указанные недостатки и может служить основой для решения всех возникающих на практике задач, связанных с определением статистических закономерностей поведения дискретных персептронов достаточно широкого класса. Ниже приводится ряд примеров применения предлагаемой теории для решения конкретных задач о поведении персептронов, принадлежащих к более общему классу, чем класс α-систем, рассмотренный Джозефом.

Заметим, что развиваемая ниже теория относится лишь к случаю дискретных персептронов. Тем не менее, получаемые на ее основе качественные выводы в значительной мере можно отнести и к непрерывным персептронам, а также к другим известным в настоящее время моделям обучения распознаванию образов, например к адапту Робертса (см. [5]) и к пандемониуму Селфриджа (см. [6]). Этих выводов оказывается достаточно, в частности, чтобы установить принципиальное отличие всех указанных моделей от реального механизма обучения распознаванию образов, имеющегося в мозгу человека. Факт неспособности персепторона моделировать многие важные особенности биологической организации обучения распознаванию образов был вынужден признать и сам Розенблатт (см. [2]). В связи с этим в конце настоящей статьи высказываются некоторые предложения по изменению как структуры самого персептрона, так и методики его обучения. Реализация этих предложений позволит, как нам кажется, в значительно большей степени, чем это доступно персептрону, приблизиться к моделированию реальных процессов, происходящих в мозгу человека.

Прежде чем переходить к построению теории обучения в персептронах, напомним принадлежащие Розенблатту и Джозефу (см. [1], [2], [3]) определения понятий персептрона и класса персептронов.

Задавая персептрон, мы должны прежде всего задать так называемую *сетчатку*, иными словами, некоторое конечное множество чувствительных элементов, которые мы будем называть *рецепторами*. Обычно сетчатка задается как множество точек плоскости, причем чаще всего имеют дело с так называемой *правильной* сетчаткой, т. е. с множеством точек вида $(a + ic,\ b + jc)$, где $c \neq 0$, i пробегает множество значений $0,1,\ldots,\ n-1$, а j — множество значений $0,1,\ldots,\ m-1$. В этом случае принято говорить, что мы имеем дело с правильной прямоугольной $(n\times m)$-сетчаткой.

В ряде случаев оказывается удобным производить отождествление противоположных краев правильной сетчатки, получая так называемую правильную тороидальную сетчатку. Мы будем представлять правильную тороидальную $(n\times m)$-сетчатку как множество точек плоскости с координатами $(a + ci,\ b+ cj)$, где i и j — произвольные целые рациональные числа, рассматриваемые, соответственно, по модулям n и m.

Сетчатка предназначена для восприятия *изображений* из того или иного класса изображений. Изображение можно представлять себе в качестве некоторого проектируемого на сетчатку черно-белого рисунка, возбуждающего составляющие сетчатку рецепторы в соответствии с яркостью соответствующих им точек рисунка. На практике принято различать два вида рецепторов, которые мы будем называть соответственно *непрерывными* и *дискретными* (двоичными).

Непрерывный рецептор воспринимает всю возможную гамму яркостей, представляющую собою множество вещественных чисел от нуля (яркость фона рисунка), до некоторого положительного числа d (максимальной возможной яркости точек рисунка). *Сигнал*, выдаваемый непрерывным рецептором, принимается равным яркости соответствующей ему точки рисунка.

Дискретный (двоичный) рецептор может выдавать лишь два сигнала, в качестве которых мы будем выбирать вещественные числа 0 и 1. Сами изображения могут рассматриваться при этом как имеющие всю непрерывную гамму яркостей. Все яркости, не превышающие некоторый устанавливаемый заранее порог, будут вызывать нулевой сигнал рецептора, а яркости большие, чем порог,— единичный сигнал. Более удобно, однако, рассматривать в этом случае лишь двутональные изображения, состоящие либо из точек нулевой яркости (фон), либо из точек единичной яркости (собственно рисунок). Мы примем в дальнейшем именно последнюю точку зрения. Тогда, как нетрудно видеть, общее число различных изображений для любой сетчатки с дискретными рецепторами будет конечным. Для правильной прямоугольной (или тороидальной) $(n\times m)$-сетчатки с дискретными рецепторами число всех попарно различных изображений равно, очевидно, 2^{mn}. В дальнейшем мы все время будем ограничиваться лишь случаем двутональных изображений.

Изображения, с которыми оперирует персептрон, делятся на конечное число классов, называемых *образами*. В один и тот же образ зачисляются обычно изображения, которые объединяются человеком в одно общее понятие, например все квадраты, все горизонтальные линии или все изображения буквы «а».

В задачу персептрона входит определение принадлежности изображений к соответствующим классам. Для решения этой задачи персептрон имеет, кроме рецепторов, еще два вида элементов, называемых A-элементами и R-элементами.

A-Элементы представляют собой упрощенные модели нейронов, из которых состоит человеческий мозг. В связи с этим мы будем их в дальнейшем именовать просто нейронами. В соответствии с характером употребляющихся в персептроне рецепторов различают непрерывные и дискретные нейроны. Как те, так и другие нейроны имеют два вида входов, называемых возбуждающими и запрещающими. Каждый нейрон имеет конечное число входов и один выход; кроме того, ему сопоставляется некоторое вещественное число, называемое *весом* данного нейрона. В качестве области значений весов нейронов принимается множество всех вещественных чисел, независимо от того, идет ли речь о непрерывных нейронах или о дискретных.

Помимо веса, а также числа возбуждающих и числа запрещающих входов, нейрон характеризуется еще законом своего функционирования, определяющим выходной сигнал нейрона как функцию его входных сигналов и веса. Следует иметь в виду, что входы всех нейронов в персептроне подсоединяются к рецепторам, так что вырабатываемые рецепторами сигналы служат входными сигналами для нейронов.

Непрерывные нейроны, рассматривавшиеся первоначально Розенблаттом [1], имели закон функционирования вида $z = v(\Sigma x - \Sigma y)$, где z — выходной сигнал, v — вес нейрона, Σx — сумма сигналов, поступающих в нейрон по возбуждающим входам, а Σy — сумма сигналов, поступающих по запрещающим входам (x, y, v и z — произвольные числа).

Закон функционирования дискретных нейронов задается обычно указанием некоторого целого рационального числа p, называемого *порогом срабатывания* нейрона или просто *порогом*. Если алгебраическая сумма

$\Sigma x - \Sigma y$ возбуждающих и запрещающих входных сигналов меньше порога, то нейрон считается невозбужденным и выдает выходной сигнал, равный нулю. При достижении суммой $\Sigma x - \Sigma y$ порога и при превышении его нейрон возбуждается и выдает выходной сигнал, равный своему весу v (независимо от величины превышения суммы входных сигналов над порогом).

Дискретные нейроны с описанным законом функционирования удобно характеризовать тройкой целых чисел (k, l, p), первое из которых равно числу возбуждающих входов, второе — числу запрещающих входов, а третье —величине порога. Вес нейрона в дальнейших рассмотрениях будет всегда величиной переменной и потому не будет вводиться в характеристику нейрона. Дискретные нейроны указанного вида, имеющие одну и ту же характеристическую тройку чисел (k, l, p), условимся относить к одному и тому же типу независимо от возможного различия их весов.

В дальнейшем предполагается, что все нейроны любого данного персептрона принадлежат к одному типу. В персептроне, рассчитанном на различение k различных образов, множество всех нейронов разбивается на k попарно непересекающихся групп (подмножеств), поставленных во взаимно-однозначное соответствие различаемым образам. Нейроны, принадлежащие группе, поставленной в соответствие i-му образу, будем для краткости называть просто *нейронами i-го образа* $(i = 1,\dots,k)$.

Входы каждого входящего в персептрон нейрона подсоединяются к рецепторам сетчатки. Мы будем предполагать при этом, что различные входы одного и того же нейрона подсоединяются к различным рецепторам. Выходы же нейронов подсоединяются к специальным сумматорам, называемым *R-элементами*, причем выходы нейронов одного и того же образа подсоединяются к одному и тому же сумматору, называемому *сумматором этого образа*.

Выходной сигнал сумматора любого данного образа равняется сумме весов всех возбужденных нейронов этого образа. Если ни один из нейронов рассматриваемого образа не возбужден, то выходной сигнал соответствующего сумматора принимается равным нулю. Окончательным выходным сигналом всего персептрона считается тот образ,сумматор которого имеет наибольший выходной сигнал. В случае, когда максимальное значение выходного сигнала достигается одновременно сумматорами нескольких образов, выходной сигнал персептрона считается неопределенным.

Принимая в качестве входного сигнала всего персептрона проектируемое на его сетчатку изображение, мы получаем в качестве реакции персептрона на этот сигнал тот образ, к которому персептрон относит данное изображение. Ниоткуда, разумеется, не следует, что рассматриваемый персептрон осуществит правильную классификацию изображений в соответствии с *заданным заранее* разбиением множества изображений на различные образы. Это первоначальное разбиение задается человеком. Мы будем называть его *исходной* (или априорной) классификацией изображений, в отличие от *фактической* классификации, осуществляемой выбранным персептроном.

Необходимо поэтому еще задать некоторый процесс изменения характеристик персептрона, позволяющий по мере показа персептрону различных изображений приближать фактически производимую им классификацию к исходной классификации. Этот процесс задается с помощью указания так называемого *закона поощрения.*

Для дискретных персептронов в качестве основного закона поощрения мы выберем несколько обобщенный закон поощрения в так называемых α-системах, рассматривавшихся Джозефом [3]. Этот закон, который мы будем называть (*обобщенным*) α-*законом*, вполне характеризуется заданием двух неотрицательных констант a и b, не равных нулю одновременно. Смысл данного закона поощрения состоит в том, что после каждого показа персептрону очередного изображения веса некоторых нейронов увеличиваются на величину, равную a, а веса других уменьшаютя на величину, равную b. (Закон поощрения в α-системах Джозефа получается из (обобщенного) α-закона в случае, когда $a = 1$, $b = 0$.)

Различают два режима функционирования персептрона с обобщенным законом поощрения. Первый режим, называемый режимом *обучения*, состоит в поощрении (увеличении веса на величину a) всех возбужденных нейронов того образа, которому принадлежит рассматриваемое на данном шаге изображение, и в оштрафовании (уменьшении веса на величину b) всех возбужденных нейронов остальных образов. Ясно, что указание правильного образа, которому принадлежит данное изображение, должно осуществляться человеком-учителем, ибо только ему известна исходная априорная классификация изображений.

Второй режим, называемый режимом *самообучения*, отличается от режима обучения только тем, что определение образа, которому принадлежит рассматриваемое изображение, производится самим персептроном: в качестве такого образа выбирается тот образ, который фактически был выдан персептроном в ответ на показ данного изображения. Разумеется, при этом не имеется никакой гарантии, что выданный персептроном ответ будет правильным (в смысле исходной классификации изображений). Однако при соблюдении некоторых условий в случае неограниченного увеличения числа шагов в процессе самообучения персептрон может восстановить исходную классификацию изображений.

Кроме (обобщенного) α-закона поощрения, иногда оказывается целесообразным рассматривать еще два закона, которые мы будем называть соответственно (обобщенным) β-законом и (обобщенным) γ-законом. В обоих этих законах сохраняется принцип поощрения и штрафования, принятый в (обобщенном) α-законе. В дополнении к этому в β-законе на каждом шаге (как в режиме обучения, так и в режиме самообучения) происходит уменьшение веса всех нейронов (как возбужденных, так и не возбужденных) на величины, прямо пропорциональные их весам, с общим для всех нейронов коэффициентом пропорциональности β. В γ-законе осуществляется дополнительное (к операциям α-закона) изменение весов всех нейронов (как возбужденных, так и не возбужденных) на одну и ту же величину, выбираемую на каждом шаге так, чтобы сумма весов всех нейронов оказывалась бы всегда равной нулю.

В случае непрерывных нейронов (обобщенный) α-закон поощрения состоит в том, что любой нейрон правильного (априорно или с точки зрения персептрона) образа увеличивает свой вес на величину произведения

q константы a на суммарный входной сигнал нейрона: $q = a(\Sigma x - \Sigma y)$. Аналогичным образом веса нейронов всех остальных образов уменьшаются на величину $b(\Sigma x - \Sigma y)$ (свою для каждого отдельного нейрона). Дополнения, отличающие β- и γ-законы, остаются теми же, что и в дискретном случае.

При построении теории обучения и самообучения персептронов часто оказывается целесообразным рассматривать не отдельные персептроны, а некоторые классы персептронов. *Классом персептронов* мы будем называть множество персептронов, которые могут отличаться друг от друга лишь способом соединения нейронов с рецепторами и начальными весами нейронов. Все остальные характеристики персептронов, входящих в один и тот же класс, предполагаются одинаковыми. К числу этих характеристик относится вид рецепторов и нейронов, общее число рецепторов и структура сетчатки, множество изображений и множество образов, исходная классификация изображений (распределение их по образам), число нейронов каждого образа и, наконец, закон поощрения.

Что же касается способа соединения нейронов с рецепторами и начальных весов нейронов, то эти характеристики считаются случайными и характеризуются (в пределах выбранного класса) некоторыми законами распределения. Иными словами, класс персептронов рассматривается не как абстрактное множество персептронов, а как множество с заданным на нем полем вероятностей, определяющим вероятность выбора того или иного конкретного представителя рассматриваемого класса. Можно, таким образом, считать, что задание класса определяет некоторый *случайный персептрон.*

Начальные веса нейронов обычно считаются при этом независимыми случайными величинами, имеющими один и тот же закон распределения. Точно так же способ соединения кажого нейрона с сетчаткой предполагается не зависящим от соединений остальных нейронов, а каждому возможному способу соединения отдельного нейрона с сетчаткой сопоставляется вероятность этого способа, общая для всех нейронов. При этом подсоединение всех нейронов персептрона (из рассматриваемого класса персептронов) к сетчатке трактуется как серия независимых опытов, характеризуемых указанными вероятностями.

Сочетая вероятностную характеристику для способа соединения нейронов с сетчаткой с законом распределения начальных весов нейронов, приходим к искомому закону распределения в классе персептронов. Один из наиболее часто встречающихся законов распределения получается, когда все начальные веса детерминированы и равны одному и тому же числу (чаще всего нулю), а подсоединение всех входов любого данного нейрона производится независимо одно от другого на основании того или иного закона распределения (чаще всего равномерного), заданного непосредственно на сетчатке.

При построении теории обучения персептронов приходится рассматривать так называемые *обучающие последовательности* и *классы обучающих последовательностей.* Обучающая последовательность — это просто конечная последовательность изображений, показанных персептрону одно за одним в процессе его обучения или самообучения. Общее число показанных изображений (включая повторения) называется *длиной* обучающей последовательности. Классом обучающих последовательностей называется множество всех последовательностей одной и той же длины, в котором задан закон распределения, определяющий вероятность выбора любой данной последовательности рассматриваемого класса.

Чаще всего такой закон распределения получается с помощью приписывания любого изображения из рассматриваемого множества изображений на каждом шаге обучения, причем обычно рассматривается случай, когда эти вероятности одинаковы на всех шагах, т. е. когда обучающая последовательность представляет собой серию независимых экспериментов по выбору изображений с приписанными каждому изображению неизменными вероятностями. В дальнейшем мы будем ограничиваться именно этим случаем.

Эффективность обучения в данном классе A персептронов с помощью данного класса B обучающих последовательностей определяется как вероятность правильного опознавания очередного изображения p, подаваемого на случайно выбираемый из класса A персептрон после предварительной подачи на него обучающей последовательности, случайно выбранной из класса B. При этом различается два вида эффективностей. Так называемая *полная* эффективность обучения получается тогда, когда выбор изображения p производится случайно (с фиксированными заранее вероятностями появления различных изображений, использованными при установлении закона распределения в классе обучающих последовательностей). Эффективность обучения *по одиночному изображению* q получается, когда в качестве очередного изображения персептрону предлагается распознать именно изображение q.

На практике достаточно часто приходится рассматривать случай, когда все изображения в известном смысле равноправны как по отношению к рассматриваемому классу персептронов, так и в отношении равенства вероятностей появления этих изображений в обучающих последовательностях. В этом случае эффективность обучения по любому произвольно выбранному одиночному изображению будет столь же полно характеризовать способность персептронов к обучению, как и полная эффективность обучения.

Переходя к построению теории обучения персептронов, мы ограничимся рассмотрением лишь дискретных персептронов с (обобщенным) α-законом поощрения, работающих в режиме обучения (а не самообучения[1]), не оговаривая этого обстоятельства каждый раз особо. Теория обучения в этом случае получается наиболее простой и прозрачной, поскольку здесь оказывается возможным не следить за функционированием каждого отдельного нейрона, а ограничиться рассмотрением лишь некоторых интегральных характеристик.

В предлагаемом нами варианте теории такой интегральной характеристикой служит так называемый *характеристический тензор* персептрона. Подчеркнем сразу, что применение термина «тензор» в этом случае не связано ни с какими закономерностями преобразования его компонент при изменении системы координат, а служит лишь наименованием некоторой целочисленной таблицы с тремя входами. Для описания такой таблицы введем определенную нумерацию всех изображений, принадлежащих рассматриваемому персептрону, числами от 1 до m и нумерацию всех образов, на которые подразделяются эти изображения, числами от 1 до q.

Тогда характеристический тензор персептрона представляет собой совокупность компонент T_{ij}^k, где индексы i и j пробегают значения от 1 до m, а индекс k — значения от 1 до q. *Через* T_{ij}^k *обозначается число нейронов* k*-го образа, которые возбуждаются как* i*-м, так и* j*-м изображением.*

Характеристический тензор класса персептронов определяется, по существу, точно так же. Различие состоит лишь в том, что его компоненты T_{ij}^k будут на этот раз не детерминированными, а *случайными* величинами, законы распределения которых очевидным образом определяются законом распределения, характеризующим способ подсоединения нейронов к сетчатке.

Из приведенных определений непосредственно следует справедливость соотношения

$$T_{ij}^k = T_{ji}^k \quad (i, j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, q). \tag{1}$$

Ясно также, что любой «диагональный» элемент тензора, например T_{ii}^k, представляет собой число нейронов того или иного (в данном случае k-го) образа, возбуждающихся под действием одного лишь i-го изображения. Отсюда непосредственно вытекает справедливость следующего неравенства:

$$T_{ii}^k \geqslant T_{ij}^k \quad (i, j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, q). \tag{2}$$

Персептрон или класс персептронов мы будем называть *симметричными*, если компоненты характеристического тензора не зависят от верхнего индекса, т. е. если справедливо соотношение

$$T_{ij}^{k_1} = T_{ij}^{k_2} \quad (k_1, k_2 = 1, \ldots, q;\ i, j = 1, \ldots, m). \tag{3}$$

Верхний индекс в этом случае становится излишним, так что симметричные персептроны и классы персептронов естественно характеризовать не трехвходовой таблицей (T_{ij}^k), а двухвходовой таблицей (T_{ij}), где $T_{ij} = T_{ij}^1 = T_{ij}^2 = \ldots = T_{ij}^k$. Соответствующую двухвходовую таблицу условимся называть *характеристической матрицей* персептрона (или класса персептронов).

Введем еще одно обозначение. Для произвольной (конечной) последовательности изображений l через U_i^k (l) будем обозначать выходной сигнал сумматора k-го образа, индуцируемый в рассматриваемом персептроне i-м изображением, показываемым после обучения персептрона обучающей последовательностью l. Через U_i^k обозначим соответствующий сигнал до начала процесса обучения, т. е., иными словами, сигнал U_i^k (l) для случая, когда обучающая последовательность (l) пуста (имеет длину, равную нулю).

Величины U_i^k будут, очевидно, детерминированными в случае выбора определенного персептрона и случайными в случае рассмотрения класса персептронов. Иногда оказывается целесообразным рассматривать также и последовательность l как случайную последовательность, пробегающую рассматриваемый класс L обучающих последовательностей.

Особенностью α-закона обучения персептронов является своеобразное *свойство коммутативности* процесса обучения, выражаемое следующим предложением:

Теорема 1. *В персептроне (или в классе персептронов) с (обобщенным) α-законом поощрения выходной сигнал U_i^k (l) сумматора k-го образа под действием i-го изображения после обучения любой последовательностью l не изменится, если в последовательности l будет произведена произвольная перестановка составляющих ее изображений. Это будет справедливо для любого изображения i и любого образа k.*

В самом деле, входные сигналы нейронов k-го образа, индуцируемые i-м изображением, очевидно, не изменяются в процесса обучения, так что они остаются, в частности, одинаковыми после показа обучающей последовательности l и любой другой последовательности l'. Таким образом, изменение выходного сигнала сумматора в процессе обучения обусловлено исключительно изменением весов нейронов. В силу определения (обобщенного) α-закона изменения весов нейронов при показе любого изображения в процессе обучения (но, вообще говоря, не в процессе самообучения!) не зависят от того места, которое данное изображение занимает в обучающей последовательности. Поскольку же суммарное приращение веса любого нейрона в процессе обучения равно просто сумме приращений на каждом шаге этого процесса, то справедливость теоремы 1 тем самым полностью доказана.

Используя теорему 1, мы получаем возможность характеризовать любую обучающую последовательность l целочисленным вектором $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$, i-я компонента которого (для любого $i = 1, 2, \ldots, m$) равна числу вхождений i-го изображения в последовательность l. Условимся называть этот вектор *характеристическим вектором* последовательности l. Класс обучающих последовательностей также можно задавать с помощью характеристического вектора. Однако компоненты вектора будут в этом случае, вообще говоря, уже не детерминированными, а случайными величинами.

Для описания процесса обучения персептронов с (обобщенным) α-законом поощрения исходный персептрон (или класс персептронов) достаточно задавать лишь его характеристическим тензором (T_{ij}^k) и матрицей начальных сигналов сумматоров образов (U_i^k) $(i, j = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, n)$. Обучающая же последовательность l (или класс обучающих последовательностей) задается своим характеристическим вектором $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$. В общем случае все величины T_{ij}^k, U_i^k, ν_i будут случайными. На практике же чаще всего рассматривают различные частные случаи, когда те или иные из указанных величин детерминированы.

Для того чтобы не путать между собой изображения и образы, условимся образы обозначать большими латинскими буквами, а изображения по-прежнему будем отождествлять с их номерами. Рассмотрим вопрос об определении выходных сигналов сумматоров образов U_i^P (l). Легко понять, что при использовании (обобщенного) α-закона поощрения величина U_i^P (l) представится в виде суммы начального сигнала U_i^P и приращений весов всех нейронов P-го образа, возбуждающихся i-м изображением, на всех шагах процесса обучения.

Характеризуя класс обучающих последовательностей характеристическим вектором $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$, нетрудно получить выражение для суммарного приращения величины $U_i^P(l)$, полученной за счет ν_j показов j-го изображения. Как следует из определения (обобщенного) α-закона с константами a и b, при каждом показе j-го изображения любой возбуждающийся этим изображением нейрон P-го образа увеличивает свой вес на величину a, если $j \in P$, и уменьшает вес на величину b, если $j \overline{\in} P$. Общее же число нейронов P-го образа, участвующих в образовании выходного сигнала $U_i^P(l)$ и возбуждаемых j-м изображением, равно, очевидно, T_{ij}^P. Таким образом, суммарное приращение величины за счет ν_j показов j-го изображения выразится формулой $aT_{ij}^P\nu_j$, если $j \in P$, и формулой $-bT_{ij}^P\nu_j$, если $j \overline{\in} P$. Теперь непосредственно усматривается справедливость следующего предложения:

Т е о р е м а 2. *Пусть задан дискретный персептрон (или класс дискретных персептронов) с характеристическим тензором T_{ij}^P и матрицей начальных выходных сигналов сумматоров образов U_i^P ($i, j = 1, \ldots, m$; $P \in R$). Если в рассматриваемом персептроне (классе персептронов) действует (обобщенный) α-закон поощрения с константами a, b, то после обучения последовательностью (или классом последовательностей) l с характеристическим вектором $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ для любого образа P и любого изображения i выходной сигнал $U_i^P(l)$ сумматора P-го образа под действием i-го изображения выражается формулой*

$$U_i^P(l) = U_i^P + a\sum_{j \in P} T_{ij}^P \nu_j - b\sum_{j \overline{\in} P} T_{ij}^P \nu_j. \tag{4}$$

Для любого изображения i через P_i условимся обозначать тот образ, которому принадлежит изображение i в исходной классификации изображений. Используя это обозначение, нетрудно выписать необходимое и достаточное условие для того, чтобы после обучения персептрон правильно классифицировал i-е изображение. Таким условием будет, очевидно, выполнение неравенств

$$U_i^{P_i}(l) > U_i^P(l) \text{ для всех } P \neq P_i. \tag{5}$$

С помощью соотношений (4) и (5) нетрудно рассчитать эффективность обучения персептрона в любом конкретном случае. Особенно простой вид эти соотношения принимают в случае симметричных персептронов. В самом деле, поскольку в этом случае $T_{ij}^{P_i} = T_{ij}^P = T_{ij}$, то соотношения (4) и (5) можно записать в виде системы неравенств

$$U_i^{P_i} + a\sum_{j \in P_i} T_{ij}\nu_j - b\sum_{j \overline{\in} P_i} T_{ij}\nu_j > U_i^P + a\sum_{j \in P} T_{ij}\nu_j - b\sum_{j \overline{\in} P} T_{ij}\nu_j$$
$$(P \neq P_i). \tag{6}$$

В неравенстве (6) слагаемые вида $\Sigma T_{ij}\nu_j$, для которых j не содержится ни в P_i, ни в P, будут входить как в левую, так и в правую часть и потому взаимно уничтожаются. После их исключения приходим к более простым соотношениям, эквивалентным соотношениям (6):

$$U_i^{P_i} + (a+b)\sum_{j \in P_i} T_{ij}\nu_j > U_i^P + (a+b)\sum_{j \in P} T_{ij}\nu_j \text{ для всех } P \neq P_i. \tag{7}$$

Неравенства (7) дают необходимые и достаточные условия для правильной классификации i-го изображения *симметричным* персептроном с характеристической матрицей (T_{ij}) и начальными сигналами сумматоров образов $U_i^{P_i}$ после обучения последовательностью с характеристическим вектором $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$. Эти неравенства можно упростить еще больше для персептронов с *симметричными начальными условиями*, т. е. для таких персептронов (или классов персептронов), для которых выполняются условия

$$U_i^P = U_i^Q \tag{8}$$

для всех $i=1, \ldots, m$ и для всех образов P и Q. Используя соотношения (8) и вспоминая, что в силу определения (обобщенного) α-закона $a+b\neq0$, приходим к следующему результату:

Теорема 3. *Пусть задан произвольный дискретный симметричный персептрон (или класс дискретных симметричных персептронов) с характеристической матрицей (T_{ij}) и с симметричными начальными условиями, в котором действует (обобщенный) α-закон поощрения. Тогда необходимые и достаточные условия правильности распознавания персептроном (классом персептронов) произвольного (i-го) изображения после обучения последовательностью (классом последовательностей) с характеристическим вектором $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ выразятся соотношениями*

$$\sum_{j\in P_i} T_{ij}\nu_j > \sum_{j\in P} T_{ij}\nu_j \text{ для всех } P\neq P_i. \tag{9}$$

Следствие. *Эффективность обучения в симметричных дискретных персептронах с симметричными начальными условиями при выполнении в них (обобщенного) α-закона поощрения не зависит от выбора (неотрицательных) констант a и b, характеризующих этот закон.*

Таким образом, при изучении симметричных дискретных персептронов с симметричными начальными условиями можно, не нарушая общности, вместо (обобщенного) α-закона поощрения с константами (a, b) пользоваться обычным α-законом поощрения с константами $(1, 0)$.

При конкретных расчетах эффективность обучения в классах персептронов обычно принимается, что все нейроны подсоединяются к сетчатке независимо один от другого, причем вероятность α_{ij} такого подсоединения нейрона, что он будет возбуждаться как i-м, так и j-м изображением, одна и та же для всех нейронов при любых фиксированных значениях i и j.

Если обозначить через T^P общее число нейронов P-го образа, то компонента T_{ij}^P характеристического тензора рассматриваемого класса персептронов может трактоваться как число наступления некоторого события, имеющего вероятность α_{ij} при T^P независимых испытаниях. Хорошо известно, что в таком случае математическое ожидание $E(T_{ij}^P)$ и дисперсия $D(T_{ij}^P)$ случайной величины T_{ij}^P выражаются следующими формулами:

$$E(T_{ij}^P) = T^P\alpha_{ij}, \qquad D(T_{ij}^P) = T^P\alpha_{ij}(1-\alpha_{ij}) \quad (i, j=1, \ldots, m;\ P\in R). \tag{10}$$

Сама величина T^P при достаточно больших значениях T может считаться нормально распределенной. Заметим еще, что в случае симметричных персептронов величины T^P для различных образов P равны между собой.

Мы будем поэтому обозначать их просто через T, опуская индекс P. Матрицу $\|\alpha_{ij}\|$ условимся называть *основной вероятностной матрицей* рассматриваемого класса персептронов.

Аналогичным образом класс обучающих последовательностей K, образуемый с помощью случайного выбора изображения на каждом шаге обучения, независимо от изображений, выбранных на остальных шагах, можно характеризовать *вероятностным вектором* $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ рассматриваемого класса. Для любого $i = 1, \ldots, m$ i-я компонента β_i этого вектора равна вероятности выбора в качестве изображения, показываемого на любом данном шаге обучения, i-го изображения. В таком случае i-я компонента ν_i характеристического вектора класса K представляет собой число наступлений события, имеющего вероятность β_i, при N независимых испытаниях, где N — длина обучающих последовательностей класса K (согласно определению класса обучающих последовательностей, все входящие в класс последовательности имеют одну и ту же длину).

Для достаточно больших значений N для любого изображения i величина ν_i может считаться нормально распределенной, а ее математическое ожидание и дисперсия даются формулами

$$E(\nu_i) = N\beta_i, \qquad D(\nu_i) = N\beta_i (1 - \beta_i) \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{11}$$

Заметим, что случайные величины ν_i, равно как и случайные величины T_{ij}^D при различных i и j, не являются, вообще говоря, независимыми, что создает дополнительные (хотя и чисто технические) трудности при вычислении вероятности правильного срабатывания персептрона по формулам (6) или (9). Впрочем, в ряде случаев с помощью введения некоторых добавочных предположений удается обойти эти трудности. Ниже мы продемонстрируем это обстоятельство на ряде примеров.

П р и м е р 1. Рассматривается дискретный персептрон с нейронами типа (1, 1, 1), имеющий правильную квадратную ($n \times n$)-сетчатку и $2n$ изображений, в качестве которых выбирается n горизонтальных линий длины n, объединяемых в образ P, и n вертикальных линий длины n, объединяемых в образ Q. Все изображения имеют одинаковые вероятности (равные $1/2n$) появления в обучающей последовательности. Будем предполагать персептрон A *полным*. Это означает, что как в множестве нейронов P-го образа, так и в множестве нейронов Q-го образа для любого способа подсоединения нейрона к сетчатке найдется в точности по одному нейрону, имеющему точно такое же соединение с сетчаткой. В персептроне A действует (обобщенный) α-закон поощрения с константами a и b, а начальные веса нейронов равны нулю.

Требуется найти эффективность обучения персептрона A в классе случайных обучающих последовательностей длины $2N$, содержащих точно N показов изображений первого образа и N показов изображений второго образа.

Р е ш е н и е. Персептрон A будет, очевидно, симметричным и поэтому будет полностью характеризоваться своей характеристической матрицей $\| T_{ij} \|$. Легко видеть, что нейрон тогда и только тогда возбуждается i-м изображением (вертикальной или горизонтальной линией), когда его возбуждающий вход подсоединен к рецептору, лежащему на соответствующей линии, а его запрещающий вход — к рецептору, лежащему вне этой линии. Для любого данного i имеется всего $n(n^2-n)=n^2(n-1)$ различных подсоединений такого рода. Ввиду полноты персептрона A имеем

$$T_{ii}=n^2(n-1) \qquad (i=1, 2, \ldots, 2n). \tag{12}$$

Будем предполагать, что номерами от 1 до n обозначены горизонтальные линии (изображения образа P), а номерами от $n+1$ до $2n$ — вертикальные линии (изображения образа Q).

По аналогии с тем, как было найдено выражение для T_{ii}, найдем еще два выражения:

$$T_{ij}=0, \qquad \text{если } i \text{ и } j \text{ — изображения одного и того же образа}, \tag{13}$$

$$T_{ij}=(n-1)^2, \qquad \text{если } i \text{ и } j \text{ — изображения различных образов}. \tag{14}$$

Обозначая через $\mathbf{E}$ единичную матрицу n-го порядка, а через $\mathbf{D}$ — квадратную матрицу порядка n, все элементы которой равны единице, представим характеристическую матрицу $\mathbf{M}$ рассматриваемого персептрона в следующем виде:

$$\mathbf{M}=\begin{Vmatrix} n^2(n-1)\,\mathbf{E} & (n-1)^2\,\mathbf{D} \\ (n-1)^2\,\mathbf{D} & n^2(n-1)\,\mathbf{E} \end{Vmatrix}. \tag{15}$$

Пусть $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2n})$ — характеристический вектор рассматриваемого класса обучающих последовательностей. В силу принятого условия компоненты этого вектора удовлетворяют условию

$$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n=\nu_{n+1}+\nu_{n+2}+\cdots+\nu_{2n}=N. \tag{16}$$

Необходимое и достаточное условие правильного распознавания любого данного изображения i представится, в силу теоремы 3, в виде

$$\sum_{j\in P_i} T_{ij}\nu_j > \sum_{j\overline{\in} P_i} T_{ij}\nu_j, \tag{17}$$

или, с учетом соотношения (12), (13), (14) и (16), в виде

$$n^2(n-1)\,\nu_i > (n-1)^2 N. \tag{18}$$

Соотношение (18) представим в эквивалентном виде:

$$\nu_i > \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)N. \tag{19}$$

Вероятность появления i-го изображения в каждом из N показов представителей образа P_i равна $1/n$. Поэтому для математического ожидания и дисперсии величины ν_i получим выражения

$$E(\nu_i)=\frac{1}{n}N, \qquad D(\nu_i)=N\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right). \tag{20}$$

Как хорошо известно из теории вероятностей, при достаточно большом N вероятность q_i выполнения неравенства (19) может быть вычислена по формуле

$$q_i \approx 0.5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^k e^{-z^2/2}\,dz \qquad (i=1, \ldots, 2n), \tag{21}$$

где k — величина отношения уклонения правой части неравенства (19) от $E(\nu_i)$ к среднеквадратичному уклонению величины ν_i, равному квадратному корню из дисперсии. Иными словами,

$$k = \frac{1}{n^2} N : \sqrt{N \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{\frac{N}{n^3\left(1-\frac{1}{n}\right)}} \approx \sqrt{\frac{N}{n^3}}. \tag{22}$$

Поскольку величина q_i не зависит от i, она будет совпадать с вероятностью q правильного распознавания персептроном A любого наугад выбираемого изображения после предварительного показа случайно выбираемой обучающей последовательности длины $2N$ из рассматриваемого класса последовательностей.

Величина же вероятности q есть не что иное, как полная эффективность обучения персептрона A в заданных условиях.

Приведем таблицу значений вероятности q для нескольких значений k:

N	n^3	$4n^3$	$9n^3$
k	1	2	3
q	0.841	0.977	0.999

Таким образом, для того чтобы уменьшить вероятность ошибки рассматриваемого персептрона до 0.1% при случайном выборе обучающей последовательности, необходимо пользоваться последовательностями весьма большой длины, равной $18n^3$. В то же время из неравенства (17) непосредственно видно, что можно свести эту вероятность к нулю (получив *абсолютно точное* распознавание) за счет показа каждого изображения в точности по одному разу, т. е. с помощью последовательности, имеющей длину всего лишь $2n$. Этот пример наглядно демонстрирует невыгодность использования случайных обучающих последовательностей. Вместе с тем он свидетельствует о серьезных отличиях описанного механизма обучения от механизма обучения, реализующегося в мозгу человека. В самом деле, последний механизм обладает ярко выраженной способностью к *экстраполяции опыта*, т. е. к правильному распознаванию изображений, которые ни разу не появлялись в процессе обучения. В то же время описанный в рассмотренном примере персептрон не дает окончательной гарантии правильного распознавания изображений (при случайной организации процесса обучения) даже тогда, когда среднее число показов каждого изображения достигает весьма значительной величины (имеющей порядок n^2).

Указанный вывод связан, разумеется, до некоторой степени со спецификой самого примера. Нетрудно заметить, однако, что при чисто случайном подсоединении (1, 1, 1)-нейронов к сетчатке (исключая подсоединение к одному и тому же рецептору обоих входов нейрона) математические ожидания компонент характеристической матрицы будут отличаться от компонент характеристической матрицы полного персептрона лишь постоянным множителем, несущественным с точки зрения вычисления эффективности обучения. Поэтому при случайном подсоединении нейронов к сетчатке наиболее вероятным поведением получающихся персептронов будет именно описанное выше поведение полного персептрона.

Таким образом, случайная организация связей нейронов с сетчаткой не может, вообще говоря, обеспечить хорошее качество функционирования персептрона. Из теоремы 3 легко следует, что способность персептрона к экстраполяции опыта увеличивается при увеличении тех компонент характеристической матрицы, индексы которых принадлежат одному и тому же образу, и при уменьшении тех компонент, индексы которых принадлежат различным образам.

Условимся говорить, что персептрон обладает *абсолютной способностью к экстраполяции*, если для любого образа P и любого изображения i из этого образа обучение любой последовательностью, содержащей не менее одного раза изображение i, приводит к правильному распознаванию всех изображений этого образа.

Имеет место следующий результат:

Теорема 4. *Для того чтобы дискретный симметричный персептрон с симметричными начальными условиями, в котором действует (обобщенный) α-закон поощрения, обладал абсолютной способностью к экстраполяции, необходимо и достаточно, чтобы все компоненты T_{ij} характеристической матрицы персептрона, индексы которых принадлежат одному и тому же образу, были бы отличны от нуля, а все компоненты T_{ij}, индексы которых принадлежат различным образам, были бы равны нулю.*
В самом деле, пусть условие теоремы выполнено. Тогда неравенство (9) будет иметь место, если хотя бы для одного изображения j из P_i величина ν_j будет отлична от нуля. В силу теоремы 3 это как раз и означает, что рассматриваемый персептрон обладает абсолютной способностью к экстраполяции.

Предположим, что условие теоремы не выполнено. Это приводит к рассмотрению двух случаев: 1) для некоторого образа Q найдется принадлежащая ему пара изображений i, j такая, что $T_{ij} = 0$; 2) найдется пара изображений k,r, принадлежащих различным образам, и такая, что $T_{kr} \neq 0$. В первом случае в силу теоремы 3 обучающая последовательность, составленная исключительно из изображений j, не приведет к правильному распознаванию изображения i. Во втором случае рассмотрим обучающую последовательность, составленную из одного изображения k и любого числа ν_r (большего, чем T_{kk}/T_{kr}) изображений r. Тогда применительно к распознаванию изображения k подстановка указанных значений в неравенство (9) приводит к неравенству $T_{kk} > \nu_r\, T_{kr}$. Ввиду выбора ν_r это неравенство неверно, что, в силу теоремы 3, означает невозможность правильного распознавания изображения k. Тем самым доказано, что в обоих случаях персептрон не будет обладать абсолютной способностью к экстраполяции, что и требовалось доказать.

Обычно при нумерации изображений изображения, принадлежащие к одному и тому же образу, нумеруются последовательными целыми числами. При этом условии характеристические матрицы симметричных персепронов естественным образом разбиваются на клетки, соответствующие различным образам. Абсолютная способность к экстраполяции достигается в том случае, когда эти матрицы клеточно-диагональные, а диагональные клетки не содержат нулевых элементов.

Такой вид характеристических матриц не всегда в полной мере достижим, однако даже сколько-нибудь удачное приближение к нему требует, как правило, отказа от вполне случайного соединения нейронов с сетчаткой. Получаемый в результате такого отказа эффект лучше всего продемонстрировать на примере.

П р и м е р 2. Найти эффективность обучения персептрона B, отличающегося от персептрона A из примера 1 лишь тем, что в нем оставлены только те нейроны, оба входа которых подсоединены к рецепторам, лежащим либо на одной горизонтальной, либо на одной вертикальной линии. Условия обучения остаются теми же, что и в примере 1.

Р е ш е н и е. Персептрон B, как и персептрон A, будет, очевидно, симметричным. Нетрудно подсчитать, что элементы его характеристической матрицы задаются следующими соотношениями:

$$T_{ii} = n\,(n-1), \qquad T_{ij} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, 2n;\ i \neq j).$$

Условие правильного распознавания i-го изображения выразится условием $T_{ii}\nu_i > 0$, или, что одно и то же, $\nu_i > 0$. Иначе говоря, для правильного распознавания i-го изображения необходимо и достаточно, чтобы оно было хотя бы раз показано персептрону в процессе его обучения.

При N случайных показах изображений одного образа вероятность непоявления в обучающей последовательности i-го изображения равна, очевидно, $(1-1/n)^N \approx e^{-N/n}$, а полная эффективность обучения выражена числом $1-e^{-N/n}$. Для того чтобы уменьшить вероятность неправильного срабатывания персептрона до 0.1%, подобно тому как это было сделано в примере 1, достаточно положить $N = 7n$, или, иными словами, оперировать обучающей последовательностью длины $14n$. Напомним, что в первом примере такая же эффективность обучения достигалась лишь на обучающих последовательностях длины $18n^3$.

Любопытно, что столь резкое увеличение эффективности обучения достигнуто не за счет усложнения, а за счет упрощения персептрона, поскольку персептрон B получается из персептрона A с помощью выбрасывания большого числа плохо присоединенных к сетчатке нейронов. Легко подсчитать, что общее число нейронов в персептроне A равно $2n^2\,(n^2-1)$, а в персептроне B — лишь $4n\,(n-1)$. Это обстоятельство еще раз свидетельствует о несовершенстве обучающего механизма персептрона и его существенном отличии от процессов обучения, протекающих в мозгу человека.

Рассмотрим еще один пример расчета эффективности обучения в классе персептронов.

П р и м е р 3. Определить эффективность обучения класса C дискретных симметричных персептронов с симметричными начальными условиями, подчиняющихся (обобщенному) α-закону поощрения. Сетчатка, образы и изображения такие же, как и в примере 1. Число нейронов каждого из двух имеющихся образов равно N. Входы всех нейронов подсоединяются независимо друг от друга с равной вероятностью к любому рецептору сетчатки, исключая лишь случай одновременного подсоединения обоих входов нейрона к одному и тому же рецептору. Обучающая последовательность содержит каждое из $2n$ изображений в точности по одному разу

Решение. Легко видеть, что компоненты T_{ij} характеристической матрицы класса C, у которых индексы i и j являются различными изображениями одного и того же образа, равны нулю. Условие правильного распознавания i-го изображения, даваемое теоремой 3, запишется в нашем случае в виде

$$T_{ii} > \sum_{j \in P_i} T_{ij}. \tag{23}$$

Легко видеть, что множества M_{ij} нейронов одного и того же образа, возбуждающихся как i-м, так и j-м изображением, при различных j, отличных от i, попарно не пересекаются. Все эти множества содержатся, разумеется, в множестве M_{ii}. Так как T_{ij} есть не что иное, как число элементов множества M_{ij}, то для выполнения неравенства (23) необходимо и достаточно, чтобы среди нейронов образа P_i нашелся хотя бы один нейрон, возбуждающийся i-м изображением, но не возбуждающийся никаким изображением противоположного (отличного от P_i) образа.

Из геометрии изображений непосредственно вытекает, что этому условию удовлетворяют нейроны, оба входа которых подсоединены либо к одной и той же вертикали (если i — горизонтальная линия), либо к одной и той же горизонтали (если i — вертикальная линия). Для любого фиксированного i из общего числа $n^2(n^2-1)$ различных подсоединений этому условию удовлетворяет лишь $n(n-1)$ подсоединений. Вероятность желательного подсоединения равна поэтому $n(n-1)/n^2(n^2-1) = 1/n(n+1)$, а вероятность, что такое подсоединение не будет иметь места ни для одного из N нейронов, равна $(1 - 1/n(n+1))^N \approx e^{-N/n(n+1)}$. Следовательно, полная эффективность обучения r выражается формулой

$$r \approx 1 - e^{-N/n(n+1)}.$$

Если число нейронов каждого образа равно $7n(n+1)$, т. е. примерно в 7 раз больше общего числа рецепторов, то вероятность неправильного срабатывания наугад выбираемого из класса C персептрона после обучения с помощью показа всех изображений по одному разу будет равна e^{-7}, что равняется приблизительно 0,001.

Как уже отмечалось выше, построенная теория обучения персептронов свидетельствует о коренных отличиях реализуемого ими механизма процесса обучения от реального процесса обучения, имеющего место в мозгу человека. Переход от дискретных нейронов к непрерывным, равно как и замена α-закона поощрения β- или γ-законом, этого положения существенно не меняет. Частично положение может быть исправлено за счет добавления к реализуемым в персептроне процессам процесса пересоединения нейронов, мешающих процессу обучения или недостаточно способствующих ему.

Можно предусмотреть, например, периодическую проверку весов нейронов и случайные пересоединения нейронов с малым весом. Механизмы такого рода реализуются в схемах адапта Робертса и пандемониума Селфриджа (см. [5] и [6]). Они позволяют увеличивать коэффициент использования оборудования и уменьшать число нейронов, достигающее в схемах персептронов с чисто случайными соединениями нейронов непомерно больших значений.

Вместе с тем указанная мера совершенно недостаточна для объяснения такой особенности приспособительных функций мозга, как использование тех или иных признаков, выделенных на уже изученных образах, для ускорения процесса обучения распознаванию новых образов, содержащих все или часть этих признаков. Легко понять, что подобный процесс можно реализовать в *многоступенчатых персептронах*, т. е. в таких схемах, у которых сумматоры образов персептрона низшей ступени используются в качестве рецепторов для персептрона следующей ступени. При этом персептроны низших ступеней обучаются распознаванию отдельных свойств образов, а персептроны высших ступеней — распознаванию наборов этих свойств. Соответствующие изменения и усложнения законов поощрения могут быть выполнены многими различными способами, на описании которых мы останавливаться не будем.

Введение перечисленных усовершенствований не позволяет, однако, приблизиться к моделированию еще одной важной особенности, присущей мозгу, а именно к установлению инвариантности всех образов по отношению к их движению и изменению размеров на основе *ограниченного опыта*, использующего только *небольшую часть* всех образов. Для достижения успеха и в этом направлении необходимо изменить не только конструкцию персептрона, но и методику самого процесса обучения. С этой целью для распознающего устройства вводится возможность вмешательства в организацию обучающей последовательности.

Если, например, распознающему устройству *A* показывается в качестве представителей того или иного образа несколько различных изображений, то устройство *A* должно обладать возможностью повторить демонстрацию этих изображений столько раз, чтобы обеспечить в дальнейшем их правильное распознавание. Более того, устройству должна быть предоставлена возможность повторения показа тех же изображений, подвергнутых таким изменением, которым обычно подвергается изображение предмета на сетчатке глаза при изменениях взаимного положения глаза и рассматриваемого предмета.

Можно, разумеется, не вводить описанной обратной связи, позволяющей распознающему устройству изменять обучающую последовательность. Вместо этого сами обучающие последовательности нужно строить так, чтобы после показа того или иного изображения увеличивалась бы вероятность показа на следующем шаге того же самого изображения, рассматриваемого, быть может, лишь под другим ракурсом, либо, по крайней мере, изображений, принадлежащих тому же самому образу. Иными словами, при обучении распознающих устройств необходимо отказаться от построения процесса обучения по схеме независимых испытаний и перейти к более сложным схемам, описываемым марковскими цепями.

Предполагаемые изменения методов построения обучающих последовательностей намного улучшают функционирование распознающих устройств в режиме простого обучения. Что же касается режима самообучения, то для него эти изменения имеют принципиальное значение, поскольку лишь на таком пути можно надеяться, что классификация изображений, производимая самообучающимися устройствами, будет соответствовать исходной классификации, производимой человеком. Ясно, что описание процессов подобного рода требует гораздо более сложного математического аппарата, чем тот, который был использован в настоящей работе.

Поступила в редакцию
1.12. 1961

Цитированная литература

1. F. Rosenblatt. Two theorems of statistical separability in the perceptron. Symp. Mecaniz. Thought Proc. Teddington, England, 1958, Paper 1—3, 3—32.
2. F. Rosenblatt. Perceptron simulation experiments. Proc. IRE, 1960, 48, № 3, 301—309.
3. A. E. Murray. A review on the perceptron programm. Proc. Nat. Electronics Conf., Chicago Ill., 1959, 15, 346—356.
4. R. G. Joseph. On predicting perceptron performance. IRE, Intern. Conv. Rec., 1960, № 2, 71—72.
5. L. G. Roberts. Pattern recognition with an adaptive network. IRE, Intern. Conv. Rec., 1960, № 2, 66—70.
6. O. G. Selfridge. Pandemonium: a paradigm for learning. Symp. Mecaniz. Thought Proc. Teddington, England, 1958, Paper 3—4, 3—16.